Chapitre 1

Système thermodynamique et premier principe

~~1.1~~ Fonction d'état : mathématique

Soit la fonction $f(x,y) = y \exp(ax) + xy + bx \ln y$ où a et b sont des constantes.

1) Déterminer $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ et $df(x,y)$.
2) Déterminer $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \, \partial y}$.

1.2 Fonction d'état : gaz parfait

Un gaz parfait est caractérisé par la relation $pV = NRT$ où p est la pression du gaz, V son volume, T sa température, N le nombre de moles de gaz et R est une constante.

1) Déterminer la différentielle $dp(T,V)$.
2) Déterminer $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial p(T,V)}{\partial V}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial V}\left(\dfrac{\partial p(T,V)}{\partial T}\right)$.

~~1.3~~ Fonction d'état : élastique

Un élastique de longueur L est une fonction connue $L(T,F)$ de sa température T et des forces de norme F exercées sur ses extrémités afin de l'étirer. L'étirement de l'élastique est caractérisé par deux propriétés physiques :

1) le module de Young, défini comme $E = \dfrac{L}{A}\left(\dfrac{\partial L}{\partial F}\right)^{-1}$, où A est l'aire de la section de l'élastique.

2) le coefficient d'expansion thermique $\alpha_L = \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L}{\partial T}$.

Déterminer la variation de longueur ΔL de l'élastique pour une variation ΔT sa température et une variation ΔF des forces appliquées. Supposer que $\Delta T \ll T$ et $\Delta F \ll F$. Exprimer ΔL en termes de E et α_L.

~~1.4~~ Fonction d'état : volume

Un récipient de forme conique avec un angle d'ouverture α autour de l'axe vertical est rempli de liquide (fig. 1.1). Le liquide entre dans le cône à vitesse $v(t) = kt$, où k est une constante, par un trou circulaire de diamètre d situé à sa base. Lorsque la surface du liquide est à hauteur $h(t)$, le volume est $V(t) = \dfrac{1}{3}\pi \tan^2 \alpha \, h^3(t)$. Initialement, au temps $t = 0$, la hauteur est $h(0) = 0$. Déterminer l'expression du taux de variation de volume $\dot{V}(t)$ et en déduire $h(t)$.

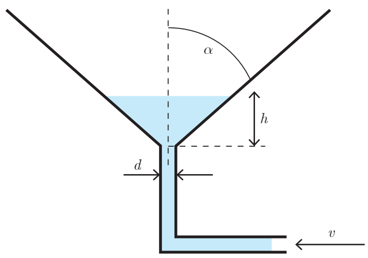

Fig. 1.1 Un liquide pénètre dans un entonnoir avec un flux laminaire de vitesse v dans un tube de diamètre d. L'entonnoir est un cône d'angle d'ouverture α. L'axe du cône est vertical.

~~1.5~~ Identité cyclique de dérivées partielles : gaz parfait

Un gaz parfait est caractérisé par la relation $pV = NRT$ (sect. 1.2) où la pression $p(T,V)$ est une fonction de T et V, la température $T(p,V)$ est une fonction de p et V et le volume $V(T,p)$ est une fonction de T et p. Déterminer,

$$\frac{\partial p(T,V)}{\partial T} \, \frac{\partial T(p,V)}{\partial V} \, \frac{\partial V(T,p)}{\partial p}$$

1.6 Homme sur un bateau

Un homme se déplace sur le pont horizontal d'un bateau. Initialement, l'homme et le bateau sont immobiles par rapport à l'eau. L'homme se déplace ensuite sur le pont, puis s'arrête.

1) En absence de frottement entre le bateau et l'eau, décrire le mouvement du bateau lorsque l'homme s'arrête.
2) En présence de frottement entre le bateau et l'eau, décrire le mouvement du bateau lorsque l'homme s'arrête.

1.7 Choc mou

On considère un choc mou entre deux objets qui restent accrochés après le choc. On peut montrer que la variation d'énergie cinétique est maximale pour un tel choc. On considère que les deux objets sont des points matériels de M_1 et M_2 qui forment un système isolé. Le point matériel de masse M_1 a une quantité de mouvement initiale $\boldsymbol{P}_1$ et le point matériel de masse M_2 est initialement au repos. Les variables d'état sont la quantité de mouvement et une variable extensive X_0 associée à une propriété interne du système (i.e. l'entropie S comme on le verra au chapitre suivant).

Soit $E_i\left(\boldsymbol{P}, X_0\right)$ l'énergie et $U_i\left(X_0\right)$ l'énergie interne juste avant le choc. Soit $E_f\left(\boldsymbol{P}, X_0\right)$ l'énergie et $U_f\left(X_0\right)$ l'énergie interne juste après le choc. En utilisant les lois de conservation de l'énergie (**??**) et de la quantité de mouvement (**??**), déterminer la variation d'énergie interne du système $\Delta U \equiv U_f\left(X_0\right) - U_i\left(X_0\right)$.

1~~.8~~ Evolution de la concentration de sel

Un bassin contient $N_s\left(t\right)$ moles de sel dissoutes dans $N_e\left(t\right)$ moles d'eau. Le bassin reçoit de l'eau douce avec un débit entrant constant I_e^{in}. On suppose que l'eau est complètement brassée dans le bassin de sorte que la concentration de sel peut être considérée comme homogène. L'eau salée sort du bassin avec un débit constant $I_{es}^{\text{out}} = I_s^{\text{out}}\left(t\right) + I_e^{\text{out}}\left(t\right)$, où $I_s^{\text{out}}\left(t\right)$ et $I_e^{\text{out}}\left(t\right)$ sont les débits sortants de sel et d'eau salée. Déterminer la concentration de sel,

$$c_s\left(t\right) = \frac{N_s\left(t\right)}{N_s\left(t\right) + N_e\left(t\right)}$$

comme fonction du temps t compte tenu des conditions initiales $N_s\left(0\right)$ et $N_e\left(0\right)$.

1~~.9~~ Capillarité : angle de contact

Pour tenir compte des effets de capillarité, on considère que l'énergie d'un système contient des contributions qui sont proportionnelles aux aires des interfaces entre les différentes parties du système. Pour une goutte de liquide mouillant une surface horizontale (fig. 1.2), on suppose que le liquide à une forme de calotte sphérique. Alors, l'énergie interne est exprimée comme

$U(h,R) = (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\,\pi a^2 + \gamma_{\ell g}\,A$ où $a = R\sin\theta = \sqrt{2Rh - h^2}$ est le rayon et $A = 2\pi Rh$ est l'aire latérale de la calotte sphérique de liquide de hauteur h obtenue en tronquant la sphère de rayon R avec la surface horizontale du substrat solide. Les paramètres $\gamma_{s\ell}$, γ_{sg}, $\gamma_{\ell g}$ caractérisent les substances et sont indépendants de la forme de la goutte. Montrer que l'angle de contact θ est donné par,

$$(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + \gamma_{\ell g}\cos\theta = 0$$

en minimisant l'énergie interne $U(h,R)$ compte tenu de la condition que le volume $V(h,R) = \frac{\pi}{3}\,h^2\,(3R - h) = V_0$ de la calotte sphérique de liquide est constant.

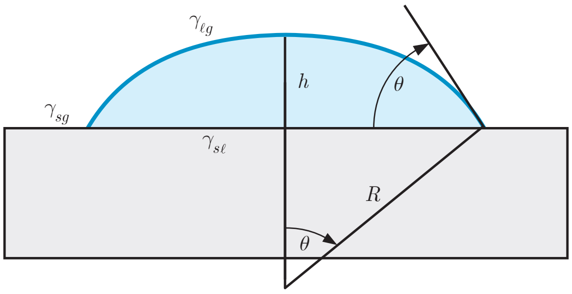

Fig. 1.2 Une goutte de liquide sur un substrat horizontal a une forme de calotte sphérique. L'angle θ est appelé angle de contact. Une tension superficielle est définie pour les trois interfaces : solide-liquide ($\gamma_{s\ell}$), solide-gaz (γ_{sg}) et liquide-gaz ($\gamma_{\ell g}$).

1.10 Energie : thermodynamique et mécanique

Un poids de masse M est suspendue à un fil. La force $\boldsymbol{F}$ exercée sur le fil est telle que le poids descend verticalement avec une vitesse $\boldsymbol{v}$ qui peut varier au cours du temps.

1) Déterminer l'évolution temporelle de l'énergie mécanique E' qui est la somme des énergies cinétiques et potentielles.
2) Déterminer l'évolution temporelle de l'énergie E du système d'après le premier principe de de la thermodynamique (**??**).

1.11 Oscillateur harmonique amorti

Un oscillateur harmonique de masse M et de constante élastique k est soumis à une force de frottement $\boldsymbol{F}_f(t) = -\lambda\,\boldsymbol{v}(t)$ où $\boldsymbol{v}(t)$ est la vitesse du point matériel et $\lambda > 0$. En utilisant l'axe de coordonnées Ox où l'origine

O correspond à la position du point matériel lorsque l'oscillateur harmonique est au repos, l'équation du mouvement s'écrit,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$$

où $\omega_0^2 = k/M$ et $\gamma = \lambda/\left(2M\right)$. Dans le régime d'amortissement faible, où $\gamma \ll \omega_0$, la position peut être exprimée comme,

$$x\left(t\right) = Ce^{-\gamma t}\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

où C et ϕ sont des constantes d'intégration.

1) Exprimer l'énergie mécanique $E\left(t\right)$ en termes des coefficients k, C et γ.
2) Déterminer la puissance $P\left(t\right)$ dissipée par la force de frottement $\boldsymbol{F}_f\left(t\right)$.